D M I

Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

ENSAH

Examen d'analyse 3

Lundi 18 janvier 2016, durée : 2h.

CP2, Semestre 3.

Année universitaire : 2015-2016 .

N.B: il sera tenu compte de la rédaction et la clarté de la feuille.

Exercice 1 : (7points)

Soit la fonction f définie par :

$$\overset{h\ k}{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

0,5 — 1- *Déterminer le domaine de définition de f.*

1 — 2- *Etudier la continuité de f sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

1 — 3- *La fonction f est-elle continue en* $(0,0)$*? justifiez votre réponse.*

1,5 — 4- *Etudier la différentiabilité de f sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ *et calculer* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

1 — 5- *Montrer que f est dérivable par rapport à x en (0,0) et que* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cancel{0} \times 1$

1 — 6- *Montrer que f est dérivable par rapport à y en (0,0) et que* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. h

1 — 7- *La fonction f est-elle différentiable en* $(0,0)$*? justifiez.* $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-h}{\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0$

Exercice 2 : (4,5points)

Soit la fonction : $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$g(x,y) = (x\sin y + y\sin x\,, xy)$$

2 — 1- *Déterminer la matrice jacobienne* $J_g(x,y)$.

0,5 — 2- *Calculer le jacobien* $j_g(x,y)$.

1 — 3- *Montrer que g n'est pas injective.* Prenons $\overset{(x,y)}{(2\pi,0)}$ et $\overset{(x',y')}{(0,2\pi)}$

C^1

d

1	4- Montrer que g est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$
 1 1,5 1 2 1	**Exercice 3 : (8,5points)** Considérons la fonction : $$h(x,y) = x^3 + 3(xy^2 - 13x - 12y)$$ 1- Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. 2- Calculer $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ puis déterminer la différetielle dh. 3- Montrer que h admet quatre points critiques à déterminer. 4- Calculer : $$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y), \quad s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y), t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)$$ et $\Delta = s^2 - rt$. $\Delta < 0$ $\Delta > 0$ $r < \dots$ 5- Montrer que h admet un minimum local, un maximum local et deux points selles.
1 0,5 0,5	6- Montrer qu'au voisinage de $(0,0)$, l'ensemble : $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ est un arc paramétré. 7- Donner les coordonnées de $\overrightarrow{\tau_0}$ vecteur directeur de la tangent à Γ au point (0,0). X 8- Donner les coordonnées de $\overrightarrow{N_0}$ la normale principale à Γ au point (0,0). X

$$(T) : \boxed{(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0}$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

$$\overrightarrow{V}(-b\,;\,a)$$

BONNE CHANCE

Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

DMI

ENSAH

Examen d'analyse 3

Mardi 31 janvier 2017, durée : 2h.

CP2, Semestre 3.

Année universitaire : 2016-2017 .

Prof : Fouzia MORADI.

N.B: il sera tenu compte de la rédaction et la clarté de la feuille.

Exercice 1 (7 points):

Soit la fonction : $h(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$

1pt — 1- Calculer $h(1,0)$ et $h(-1,0)$. Que peut – on dire de h ? inject

2pt — 2- Déterminer la matrice jacobienne $J_h(x,y)$ de h et son jacobien $j_h(x,y)$.

1pt — 3- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que h est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de (a,b).

1pt — 4- La fonction h est-elle un C^1-difféomorphisme global ?

5- Considérons la fonction : $\alpha(x,y) = x^2 - y^2$

1pt — a- Montrer que α admet un unique point critique $(0,0)$.

1pt — b- Montrer que $(0,0)$ est un point selle.

Exercice 2 (13 points):

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in U$ tels que :

$f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Soit V un voisinage de (x_0, y_0, z_0) , W un voisinage de (x_0, y_0) et une fonction $\varphi: W \to \mathbb{R}$ de C^1 tels que : $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ et

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ (x,y,z)\in V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\varphi(x,y) \\ (x,y,z)\in V \end{cases}$$

2pt	1- Donner les formules de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ pour tout $(x,y)\in W$.
	2- Soit $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par : $\psi(x,y)=(x,y,\varphi(x,y))$
1pt	a- Montrer que ψ est de C^1 sur W. ? ?
1pt	b- Déterminer sa matrice jacobienne $J_\psi(x,y)$.
1pt	c- En déduire $\psi'(x,y)(u,v)$.
	3- Soit $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur V et $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $G(x,y)=go\psi(x,y)$.
1,5pt	a- Déterminer $\nabla G(x,y)$.
1pt	b- En déduire $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)$. ???
1,5pt	c- Montrer que si (x_0,y_0) est un extrémum local de G alors : $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$
	Application : Soit $g(x,y,z)=xlnx+ylny+zlnz$ et $f(x,y,z)=x+y+z-3\alpha$ où $\alpha>0$.
1pt	1- Montrer que si (x,y,z) est un extrémum local de g avec $f(x,y,z)=0$ alors $x=y=z=\alpha$.
	2- Posons : $x=\alpha+u$, $y=\alpha+v$ et $z=\alpha+w$
1pt	a- Donner la formule de Taylor Young à l'ordre 2 de $ln(\alpha+u)$. =
1pt	b- En déduire la formule de $g(x,y,z)-g(\alpha,\alpha,\alpha)$.
1pt	c- Montrer que le point $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ est un minimum local de g. ???

$\alpha \neq \frac{1}{e}$

Tayloryong $f(a+h) = f(a) + h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} h \frac{\partial f}{\partial y}$

$f(x) = f(\alpha+u) = f(\alpha) + \frac{1}{1!} u f'(\alpha) + \frac{1}{2!} u^2 f^2(\alpha) + \dots + \frac{1}{n!}$

BON COURAGE !

Devoir surveillé 1

Mardi 22 décembre 2015, durée : 1h30.

Exercice 1 : (5points)

Notons par $A(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines sur $\mathbb{R}$.

1- Pour $f(x) = ax + b$ et $g(x) = a'x + b'$ dans $A(\mathbb{R})$, on pose :

$$\begin{cases} d(f,g) = 2 & si\ a \neq a' \\ d(f,g) = 1 & si\ a = a'\ et\ b \neq b' \\ d(f,g) = 0 & si\ f = g \end{cases}$$

2pt Montrer que d est une distance sur $A(\mathbb{R})$.

2- On pose : $N_1(f) = |a| + |b|$ et $N_2(f) = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $A(\mathbb{R})$.

3pt

Exercice 2 : (7points) 7

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

0,5 1- Déterminer le domaine de définition D_f.

$\frac{xy}{x^2+y^2}$

1pt	2- Etudier la continuité de f sur D_f.
1pt	3- Soit $x_0 > 0$ fixé. Etudier la dérivabilité de $f(x_0, .)$ en 0. $g(x_0,y) - g(x_0,0)$
1.5	4- Soit $y_0 \neq 0$ fixé. Etudier la dérivabilité de $f(.,y_0)$ en 0 et en déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$. $f(x,y_0)$
3pt	5- Etudier la dérivabilité de f par rapport à x et à y en (x,y) tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. (x,y)

Exercice 3: (8points)

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

1- Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

2pt a- $f_1:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_1(x,y) = f(x^2+y, y^3)$,

2pt b- $f_2:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_2(x,y) = f(\cos x, \cos y)$,

2pt c- $f_3:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_3(x,y) = f(e^{xy}, x-y)$.

2pt 2- Déterminer la matrice jacobienne de la fonction $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$g(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ avec $f(x,y) = xy$.

BONNE CHA

2016

Université Mohammed 1er, Oujda | Année 2016/2017

ENSA d'Al-Hoceima | Semestre 1,

CP-II, | Analyse 3

Devoir surveillé 1

19 décembre 2016, durée : 1h30mn.

Exercice 1 : (7points)

Notons $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On définit sur E les deux applications suivantes :

Pour $f \in E$,

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|dx \quad \text{et} \quad N_\infty(f) = sup\{|f(x)|: \quad x \in [0,1]\}.$$

2pt 1- Montrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.

1pt 2- Montrer que :

$$\forall f \in E: \quad N_1(f) \le N_\infty(f)$$

3- Considérons la suite de fonctions suivante : *pour* $n \ge 3$:

$$f_n(x) = \begin{cases} (n^3 - n^2)x + n & si \ 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ -(n^3 - n^2)x + 2n^2 - n & si \ \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ \frac{n^2}{2-n}(x-1) & si \ \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

1.5pt a- En encadrant $f_n(x)$ sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ et $\left[\frac{2}{n}, 1\right]$, montrer que :

$$\forall x \in [0,1]: \ 0 \le f_n(x) \le f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^2$$

0.5pt b- En déduire $N_\infty(f_n)$.

1pt c- Montrer que : $\forall n \ge 3$: $N_1(f_n) = \frac{3}{2}n$ X

1pt d- Ces deux normes sont-elles équivalentes ? justifier.

Exercice 2 : (3points)

Soit $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$f(x) \le sup\, f(x) \frac{}{n^2}$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2pt — 1- Montrer que :

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right)=0$$

1pt — 2- Peut-on en déduire que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0\ ?$$

Justifie. ? $x=y$

Exercice 3: (4points)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{xy}$$

1pt — 1- Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

1pt — 2- Etudier la continuité de f sur D_f .

1pt — 3- En utilisant l'égalité : $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, montrer que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$$

1pt — 4- f admet-elle un prolongement par continuité en (0,0)? si oui, déterminer le.

Exercice 4: (6points)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $f(1,0)\neq f(-1,0)$ et $C(0,1)$ le cercle unité.

1- Considérons : $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par : $\varphi(t)=(\cos t,\sin t)$

1pt — a- Montrer que : $\varphi(\mathbb{R})\subset C(0,1)$

1pt — b- Montrer que φ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(t)$

2- Soit $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $\psi(t)=f(\varphi(t+\pi))-f(\varphi(t))$

1pt — a- Montrer que ψ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\psi'(t)$

1pt — b- Montrer que $\boxed{\psi(0).\psi(\pi)<0}$

1pt — c- En déduire qu'il existe $t_0\in]0,\pi[$: $\psi(t_0)=0$

1pt — 3- Montrer qu'il existe au moins deux points A et B sur $C(0,1)$ diamétralement opposés tels que :

$$f(x_A,y_A)=f(x_B,y_B)$$

$\psi(t_0)=0 \Rightarrow f(\varphi(t+\pi))=f(\varphi(t))$

Bonne chance !

$g(x,x)=1$

$=1\neq 0$?